**Übungsaufgaben 3b – Der Kalkül des natürlichen Schließens:
abgeleitete Schlussregeln und Theoreme**

- *Kernaufgaben: (1): KR, IB, MT, KD; (2) KP, DM1, DM2; (3): IB, KD, KP*
→ *die restlichen Aufgaben werden als zusätzliches Übungsmaterial empfohlen*

(1) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden abgeleiteten Schlussregeln, indem Sie entsprechende Ableitungen im KNS (unter Verwendung der elementaren Schlussregeln) durchführen.

(KR) Kettenschlussregel (a.: Hypothetischer Syllogismus – HS)

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \mid\!-\! A \rightarrow C$$

(IB) Indirekter Beweis

$$\neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B \mid\!-\! A$$

(MT) Modus Tollens

$$A \rightarrow B, \neg B \mid\!-\! \neg A$$

(KD) Klassisches Dilemma; a.: Fallunterscheidung

$$A \rightarrow B, \neg A \rightarrow B \mid\!-\! B$$

(EC) Ex Contradictione Sequitur Quodlibet

$$A, \neg A \mid\!-\! B$$

(EF) Ex Falso Sequitur Quodlibet

$$\neg A \mid\!-\! A \rightarrow B$$

(SMP) Spezieller Modus Ponens

$$A \leftrightarrow B, A \mid\!-\! B$$

(SMT) Spezieller Modus Tollens

$$A \leftrightarrow B, \neg A \mid\!-\! \neg B$$

(KS) Konjunktiver Syllogismus

$$\neg(A \wedge B), A \mid\!-\! \neg B$$

(DS1) Disjunktiver Syllogismus-1

$$A \vee B, \neg A \mid\!-\! B$$

(DS2) Disjunktiver Syllogismus-2

$$\neg(A \vee B), \neg A \mid\!-\! \neg B$$

(DN) Doppelte Negation

$$A \mid\!-\! \neg\neg A$$

(2) Beweisen Sie die folgenden Theoreme (Lehrsätze) der Aussagenlogik im KNS. Verwenden Sie sowohl elementare als auch abgeleitete Schlussregeln.

(a) Kommutativgesetze

$$\vdash p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p \quad (\text{KG1})$$

$$\vdash p \vee q \leftrightarrow q \vee p \quad (\text{KG2})$$

$$\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p) \quad (\text{KG3})$$

(b) Assoziativgesetze

$$\vdash p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \quad (\text{AG1})$$

$$\vdash p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r \quad (\text{AG2})$$

$$\vdash (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \quad (\text{AG3})$$

(c) Klassische Tautologien

$$\vdash p \rightarrow p \quad (\text{ID - Identitätssatz})$$

$$\vdash \neg(p \wedge \neg p) \quad (\text{WD - Satz vom zu vermeidenden Widerspruch})$$

$$\vdash p \vee \neg p \quad (\text{AD - Satz vom ausgeschlossenen Dritten})$$

(d) Inversionsgesetze

$$\vdash (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \quad (\text{KP - Kontraposition})$$

$$\vdash (p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \rightarrow \neg p)$$

$$\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$$

(e) Distributivgesetze

$$\vdash p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\vdash p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$\vdash (p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$$

$$\vdash (p \vee q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

(f) de Morgansche Gesetze

$$\vdash \neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q \quad (\text{DM1})$$

$$\vdash \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \quad (\text{DM2})$$

(g) Gesetze zur Konnektorensubstitution

$$\vdash (p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$\vdash (p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

$$\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$$

(h) Absorptionsgesetze (auch: Verschmelzungsgesetze)

$$\vdash p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$$

$$\vdash p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$$

(3) Überprüfen Sie die abgeleiteten Schlussregeln aus (1) und die Theoreme aus (2) mit dem semantischen Verfahren der Wahrheitstafeln. Formulieren Sie zu den syntaktischen Begriffen *Ableitbarkeit* und *Beweisbarkeit* die semantischen Entsprechungen *Folgerung* und *Allgemeingültigkeit*.